Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. VIII, fasc. 2

Geometria. — *Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane.* Nota di CARLO FELICE MANARA, presentata [*] dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Nella presente Nota diamo una dimostrazione elementare della possibilità di approssimare una trasformazione regolare intercedente tra due spazi proiettivi di dimensione qualunque, fino ad un ordine qualsivoglia, mediante trasformazioni cremoniane.

Come è noto, il problema è stato posto e risolto in qualche caso da M. Villa ed E. Bompiani ed è stato portato in discussione al Congresso dell'U. M. I. tenutosi a Pisa nell'autunno del 1948. Recentemente B. Segre – in una Memoria degli Annali di Matematica – ha risolto tra l'altro questa questione, assegnando anche un limite superiore per il numero di trasformazioni quadratiche il cui prodotto approssima, in modo assegnato, una trasformazione regolare [1].

La nostra soluzione è conseguita con metodi elementari, sulla base di un'osservazione del tutto ovvia che, nelle conversazioni di Pisa, venne proposta come mezzo per poter riconoscere la possibilità (o meno) di approssimare cremonianamente una trasformazione regolare qualunque. È chiaro, invero, che questa possibilità si riconduce a quella di approssimare la generica trasformazione regolare elementare data, nel caso piano, da $T \equiv \{x' = x + ax^r y^s \; ; \; y' = y\}$.

I paragrafi 2, 3, 4 di questa Nota sono dedicati alla esposizione della soluzione nel caso del piano, mentre nel paragrafo 5 è indicata la soluzione nel caso dell'S_3, soluzione ottenuta sulla base della precedente ed estendibile, con processo ricorrente, a spazi di dimensione qualunque.

2. Sia Φ una trasformazione puntuale tra due piani: π riferito a coordinate x, y e π' riferito a coordinate x', y'. Diremo che una coppia di punti corrispondenti O, O' è una *coppia di regolarità* per Φ, se le coordinate dei punti dell'intorno di O' si possono esprimere mediante funzioni analitiche regolari ed univocamente invertibili delle coordinate dei punti corrispondenti dell'intorno di O. Senza pregiudizio per la generalità, potremo supporre che O e O' siano le origini dei sistemi cartesiani di riferimento nei rispettivi piani. Allora la Φ ammetterà un'espressione analitica del tipo seguente

$$\Phi \equiv \{x' = \Sigma a_{ik} x^i y^k \quad ; \quad y' = \Sigma b_{ik} x^i y^k\},$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1950.

(1) B. SEGRE, *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane.* « Annali di Mat. », ser. IV, to. 29, 1949; Teorema II_n: « Ogni corrispondenza analitica invertibile tra due piani può venire approssimata fino all'ordine n (≥ 2) nell'intorno di due suoi punti corrispondenti comunque fissati mediante una trasformazione cremoniana decomponibile nel prodotto di al più $(n^4 + 10n^3 - 9n^2 - 82n + 108)/4$ trasformazioni quadratiche ».

dove i secondi membri sono serie prive del termine noto, convergenti in un opportuno intorno dei valori complessi $x = y = 0$, e tali inoltre che per tali valori non si annulli lo jacobiano delle x' e y' rispetto alle x, y.

Sia ora Ψ una seconda trasformazione regolare intercedente tra π e π', portante O in O' e per la quale la coppia O, O' sia una coppia di regolarità. Si dice che Φ e Ψ *si approssimano* [2] *tra loro d'ordine n* nell'intorno della coppia O, O', se nelle espressioni analitiche di Φ e Ψ sono uguali i coefficienti dei termini simili fino a quelli di grado (complessivo) n incluso.

La relazione ora definita fra le due trasformazioni Φ e Ψ è manifestamente equaliforme, e risulta invariante di fronte alle affinità di ciascuno dei due piani in sè che tengono fermi i punti O ed O' rispettivamente. Di questa proprietà ci varremo subito per ridurre l'espressione analitica della Φ a forma più semplice; a tal fine assumeremo nel piano π' come assi x' e y' le tangenti alle curve che sono rispettivamente le trasformate degli assi x ed y, e su questi nuovi assi assumeremo la unità di misura in modo che sia

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_{x=y=0} = \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)_{x=y=0} = 1 .$$

Con ciò l'espressione analitica della Φ assumerà la forma seguente

$$(1) \qquad \Phi \equiv \begin{cases} x' = x + a_{20}\, x^2 + a_{11}\, xy + a_{02}\, y^2 + \cdots \\ y' = y + b_{20}\, x^2 + b_{11}\, xy + b_{02}\, y^2 + \cdots , \end{cases}$$

da cui intenderemo sempre di partire nel seguito, senza pregiudizio della generalità e senza alterazione del carattere di birazionalità delle eventuali operazioni a cui sottoporremo le variabili.

Consideriamo ora le trasformazioni regolari dei due tipi seguenti

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{T} \equiv \{ x' = x + a x^r y^s \quad ; \quad y' = y \} \\ \mathrm{U} \equiv \{ x' = x \quad ; \quad y' = y + b x^r y^s \} \end{cases} \qquad (r \geqq 0 \;,\; s \geqq 0 \;,\; r + s \geqq 2),$$

che indicheremo nel seguito col nome di *trasformazioni elementari di grado* $r + s$.

È del tutto ovvio il seguente

LEMMA I. – *Ogni trasformazione regolare* Φ *rappresentata analiticamente nella forma* (1) *è approssimabile fino ad un ordine n qualunque dal prodotto di opportune trasformazioni elementari* T *ed* U, *di grado non maggiore di n, in numero finito; prodotto eseguito in ordine opportuno, e precisamente in modo che il grado delle successive trasformazioni elementari non vada mai decrescendo.*

Per brevità, e non essendovi pericolo di confusioni, d'ora innanzi dicendo semplicemente che una trasformazione *approssima una* T *(od una* U*)*, avente un certo grado n, intenderemo dire che la approssima fino all'ordine n. È ora facile convincersi della validità del

LEMMA II. – *Il precedente Lemma I conserva la sua validità, qualora alle trasformazioni elementari* T *ed* U *vengano sostituite delle trasformazioni che le approssimano.*

(2) Per una esauriente precisazione di questo concetto vedere B. SEGRE, Memoria citata in (1)

Pertanto sarà sufficiente dimostrare che *le trasformazioni elementari* T *ed* U *sono approssimabili cremonianamente*, per poter concludere che tale è pure ogni trasformazione regolare, fino ad un ordine qualunque.

Nei seguenti paragrafi 3 e 4 costruiremo le trasformazioni cremoniane che approssimano una T od una U qualunque; avvertiamo però che le trasformazioni approssimanti le U si ottengono palesemente da quelle approssimanti le T scambiando le variabili x ed y, e pertanto non saranno da noi riportate.

3. Costruiremo preliminarmente trasformazioni cremoniane approssimanti le T per valori non generali di r ed s, in modo da preparare il terreno per l'approssimazione della T generica, a cui perverremo nel paragrafo 4.

TEOREMA I. – *Le* T *elementari per cui è* $r = 0, 1, 2$; s *qualunque, sono approssimabili cremonianamente.*

Invero tutte le T di questo tipo e dello stesso grado (maggiore di uno) rientrano come caso particolare nelle trasformazioni

$$x' = x + ax^2y^s + bxy^{s+1} + y^{s+2} \quad ; \quad y' = y,$$

visibilmente approssimate dalle trasformazioni di Jonquières

$$x' = x/(1 - axy^s) + bxy^{s+1} + cy^{s+2} \quad ; \quad y' = y.$$

Osservazione. – Nelle T del tipo ora trattato rientrano tutte quelle di grado due.

TEOREMA II. – *Le* T *elementari per cui è* $s = 0, 1$; r *qualunque, sono approssimabili cremonianamente.*

In base al teorema I, basterà considerare le T aventi $r > 2$; allora tutte le T del tipo indicato e dello stesso grado (maggiore di due) rientrano come caso particolare nelle trasiormazioni

$$x' = x + x^r(ax + by) \quad ; \quad y' = y \qquad (r \geqq 2). \tag{3}$$

Ora, per approssimare la generica trasformazione data dalla (3), si considerino anzitutto le quattro trasformazioni di Jonquières date dalle formule seguenti, in cui le lettere x_i ed y_i indicano opportune variabili ausiliarie intermedie

$$C_1 \equiv \{x_1 = x \quad ; \quad y_1 = y + x^{r-1}(ax + by)\}$$

$$C_2 \equiv \{x_2 = x_1 + x_1 y_1 \quad ; \quad y_2 + y_1\}$$

$$C_3 \equiv \{x_3 = x_2 \quad ; \quad y_3 = y_2 - x_2^{r-1}(ax_2 + by_2)\}$$

$$C_4 \equiv \{x_4 = x_3 \quad ; \quad y_4 = y_3/(1 - b(r-1)x_3^{r-1}y_3) + a(r-1)x_3^{r-1}y_3\},$$

ed il loro prodotto $\Theta = C_1 C_2 C_3 C_4$ (ove le operazioni vanno effettuate nell'ordine da sinistra a destra). Tenendo conto del fatto che nelle (3) è $r \geqq 2$, ed indicando con $[r + 2]$ termini di grado complessivo non minore di $r + 2$, si ha facilmente:

$$\Theta \equiv \{x_4 = x + xy + x^r(ax + by) + [r + 2] \quad ; \quad y_4 = y + [r + 2]\}.$$

Stabiliremo il teorema II mostrando che esistono opportune trasformazioni di Jonquières, in numero finito, tali che il prodotto della Θ per esse è una trasformazione approssimante la (3) d'ordine $r + 2$. Basta invero considerare la

$$C_5 \equiv \{x_5 = x_4 - x_4 y_4 \quad ; \quad y_5 = y_4\}$$

e le

$$C_{5+i} \equiv \{ x_{5+i} = x_{4+i} + x_{4+i} y_{4+i}^{2^i} \quad ; \quad y_{5+i} = y_{4+i} \},$$

in cui i è limitato dalla condizione che sia $2^{i+1} < r + 1$.

Si ha facilmente

$$\Theta C_5 \equiv \{ x_5 = x - xy^2 + x^r (ax + by) + [r + 2] \quad ; \quad y_5 = y + [r + 2] \}$$

$$\Theta C_5 \cdots C_{5+i} \equiv \{ x_{5+i} = x - xy^{2^{i+1}} + x^r (ax + by) + [r + 2] \quad ; \quad y_{5+i} = y + [r + 2] \},$$

e quindi, detto j il primo valore di i per cui è $2^{j+1} \geqq r + 1$,

$$\Theta C_5 \cdots C_j \equiv \{ x_j = x + x^r (ax + by) + [r + 2] \quad ; \quad y_j = y + [r + 2] \},$$

con che il teorema II risulta provato.

Osservazione. – Nei tipi trattati nel presente paragrafo rientrano tutte le T di grado non maggiore di quattro.

4. Sia ora da approssimarsi una T generica che, per l'osservazione fatta alla fine del precedente paragrafo, potrà supporsi di grado maggiore di quattro. In base ai teoremi I e II, sarà anzi lecito supporre

$$r > 2 \quad , \quad s > 1 . \tag{4}$$

Facciamo anzitutto la seguente

Osservazione. – La T *è approssimata dal prodotto delle trasformazioni* V e W *date da*

$$V \equiv \{ \bar{x} = x + (s + 1) ax^r y^s \quad ; \quad \bar{y} = y - rax^{r-1} y^{s+1} \},$$

$$W \equiv \{ x' = \bar{x} - sa\bar{x}^r \bar{y}^s \quad ; \quad y' = \bar{y} + ra\bar{x}^{r-1} \bar{y}^{s+1} \}.$$

Si ha infatti facilmente

$$VW \equiv \{ x' = x + ax^r y^s + [r + s + 1] \quad ; \quad y' = y + [r + s + 1] \}.$$

Ora sussistono le seguenti proposizioni:

LEMMA III. – *La* V, *sopra definita, è approssimabile dal prodotto di quattro trasformazioni di Jonquières.*

Ed invero, posto:

$$C_1 \equiv \{ x_1 = x \quad ; \quad y_1 = y + ax^r \}$$

$$C_2 \equiv \{ x_2 = x_1 + y_1^{s+1} \quad ; \quad y_2 = y_1 \}$$

$$C_3 \equiv \{ x_3 = x_2 \quad ; \quad y_3 = y_2 - ax_2^r \}$$

$$C_4 \equiv \{ x_4 = x_3 - y_3^{s+1} \quad ; \quad y_4 = y_3 \},$$

si ha facilmente, tenendo conto delle limitazioni (4),

$$C_1 C_2 C_3 C_4 \equiv \{ x_4 = x + (s + 1) ax^r y^s + [r + s + 1] \; ; \; y_4 = y - rax^{r-1} y^{s+1} + [r + s + 1] \}.$$

LEMMA IV. – *Se è* $r \geqq s$, *la* W *sopra definita è approssimabile dal prodotto di tre trasformazioni di Jonquières.*

Infatti, posto

$$G_1 \equiv \{ x_1 = x \quad ; \quad y_1 = y - ax^r y \}$$

$$G_2 \equiv \{ x_2 = x_1 + y_1^s \quad ; \quad y_2 = y_1 \}$$

$$G_3 \equiv \{ x_3 = x_2 \quad ; \quad y_3 = y_2 + ax_2^r y_2 \},$$

si consideri il prodotto $\Gamma = G_1 G_2 G_3$; tenuto conto delle limitazioni (4), si ha facilmente

$$\Gamma \equiv \{x_3 = x + y^s - sax^r y^s + [r+s+1] \ ; \ y_3 = y + rax^{r-1}y^{s+1} - a^2 x^{2r} y + [r+s+1]\},$$

Ora, se è $r \geq s$, il termine $-a^2 x^{2r} y$ che figura nell'espressione di y_3 data dalla Γ è conglobabile in quelli indicati col simbolo $[r+s+1]$, e pertanto la Γ stessa è una trasformazione approssimante W.

Tale argomentazione viene a cadere quando $r < s$; allora però sussiste il

TEOREMA III. – *Se $r < s$, esistono opportune trasformazioni di Jonquières, in numero finito, tali che il prodotto della Γ e di esse è una trasformazione approssimante* W *fino all'ordine $r+s$.*

Invero, si assuma

$$G_{3+i} \equiv \{x_{3+i} = x_{2+i} \ ; \ y_{3+i} = y_{2+i} + a^{2^i} x_{2+i}^{r 2^i} y_{2+i}\} \qquad (i \geq 1),$$

dove i si limiti superiormente colla condizione che sia $r \cdot 2^i < r + s + 1$. Si dica j il minimo valore di i per cui $r \cdot 2^{i+1} \geq r + s + 1$, e sia $\Delta = \Gamma G_4 \cdots G_j$; è chiaro allora che il prodotto della Δ per

$$G_{j+1} \equiv \{x_{j+1} = x_j - y_j^s \ ; \ y_{j+1} = y_j\}$$

approssima W.

Le proposizioni che precedono possono essere riassunte nel conclusivo

TEOREMA IV. – *Ogni trasformazione elementare del tipo*

$$T \equiv \{x' = x + ax^r y^s \ ; \ y' = y\} \quad \text{o} \quad U \equiv \{x' = x \ ; \ y' = y + bx^r y^s\}$$

è approssimabile fino all'ordine $r+s$ da un prodotto di trasformazioni di Jonquières in numero finito.

Di conseguenza, tenuto conto di quanto si è detto nel paragrafo 2, varrà il

TEOREMA V. – *Ogni trasformazione regolare intercedente fra due piani proiettivi, nell'intorno di una coppia O, O′ di punti corrispondenti che sia una coppia di regolarità, è approssimabile cremonianamente fino ad un ordine n prefissato.*

5. Diamo qui la dimostrazione dei teoremi analoghi a quelli dianzi ennunciati, per il caso in cui le trasformazioni regolari di cui si tratta intercedano fra due spazi lineari a tre dimensioni; avvertiamo però che la dimostrazione che esporremo può considerarsi come l'inizio di un procedimento ricorrente, e che pertanto i metodi tenuti e le conclusioni acquisite sono da ritenersi valevoli per spazi ad un numero qualunque di dimensioni.

Osserviamo anzitutto che a questo caso si estendono, con ovvie ed immediate modifiche, le osservazioni fatte nel paragrafo 2 ed i lemmi I e II ivi enunciati. Ci ridurremo quindi a ricercare le trasformazioni cremoniane approssimanti la

$$T \equiv \{x' = x + ax^r y^s z^t \ ; \ y' = y \ ; \ z' = z\},$$

dove potremo supporre che sia $r > 1$, altrimenti la T sarebbe già cremoniana, e che s e t siano non nulli, altrimenti potremmo applicare direttamente il teorema IV considerando le due sole variabili interessate.

Posto $\alpha = a/(s+1)$, consideriamo nello spazio le seguenti quattro trasformazioni di Jonquières

$$C_1 \equiv \{ x_1 = x \quad ; \quad y_1 = y + \alpha x^r z^t \quad ; \quad z_1 = z \}$$

$$C_2 \equiv \{ x_2 = x_1 + y_1^{s+1} \quad ; \quad y_2 = y_1 \quad ; \quad z_2 = z_1 \}$$

$$C_3 \equiv \{ x_3 = x_2 \quad ; \quad y_3 = y_2 - \alpha x_2^r z_2^t \quad ; \quad z_3 = z_2 \}$$

$$C_4 \equiv \{ x_4 = x_3 - y_3^{s+1} \quad ; \quad y_4 = y_3 \quad ; \quad z_4 = z_3 \}.$$

Si ha facilmente che il prodotto $\Theta = C_1 C_2 C_3 C_4$ assume la forma

$$x_4 = x + \alpha (s+1) x^r y^s z^t + [r+s+t+1] ;$$

$$y_4 = y - \alpha r x^{r-1} y^{s+1} z^t + [r+s+t+1] \quad ; \quad z_4 = z .$$

Ora, in base al teorema IV, è possibile assegnare una trasformazione cremoniana K operante soltanto sulle due variabili y_4 e z_4 che approssima fino all'ordine $r+s+t$ la trasformazione seguente

$$y_5 = y_4 + (r\alpha x_4^{r-1}) y_4^{s+1} z_4^t \quad ; \quad z_5 = z_4 ;$$

ed è chiaro che il prodotto $\Theta \cdot K$ approssima la T data dalla (5) fino all'ordine $r+s+t$. Ricordando le osservazioni fatte all'inizio del presente paragrafo, potremo pertanto concludere con il

TEOREMA V. – *Ogni trasformazione regolare intercedente tra due spazi lineari ad un numero qualsivoglia di dimensioni, nell'intorno di una coppia* O, O' *di punti corrispondenti che sia una coppia di regolarità, è approssimabile cremonianamente fino ad un qualunque ordine n prefissato.*

Roma, 195 . — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.